

Chapter 1

流形上的微分

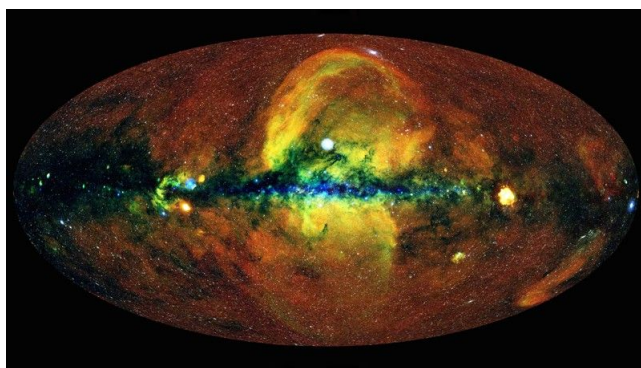
在之前的课程中，我们用了微积分的技术来研究如何在欧氏空间中通过建立坐标来研究曲面的性质以及如何由此研究曲面的弯曲程度。这种用研究曲面的方法主要是由数学家 Gauss 发展起来的。Gauss 的视角和我们现在习惯的视角是很接近的。我们可以打开百度地图，从自己所在的位置，将自己的视角不断拉高，直到来到地球的大气层外，直到能窥得地球的形状，这样我们就可以清楚地看出地球是一个球体。这是一个从外围空间来看几何体的角度，但也是外星人的角度。当然，以人类现在的技术，如果大家赚了足够多的钱，也可以坐飞船飞到月亮上来亲眼验证这件事。



这就体现了一个重要的研究几何的方法：就是把曲面放在三维欧氏空间中像太空人看地球一样来观察这个曲面的性质。这是我们之前学到的角度。而当我们打开百度地图或者看着一个地球仪时可以思考一个新的问题：在我们这个宇航时代，我们想要看清楚宇宙的形状，该怎么办？

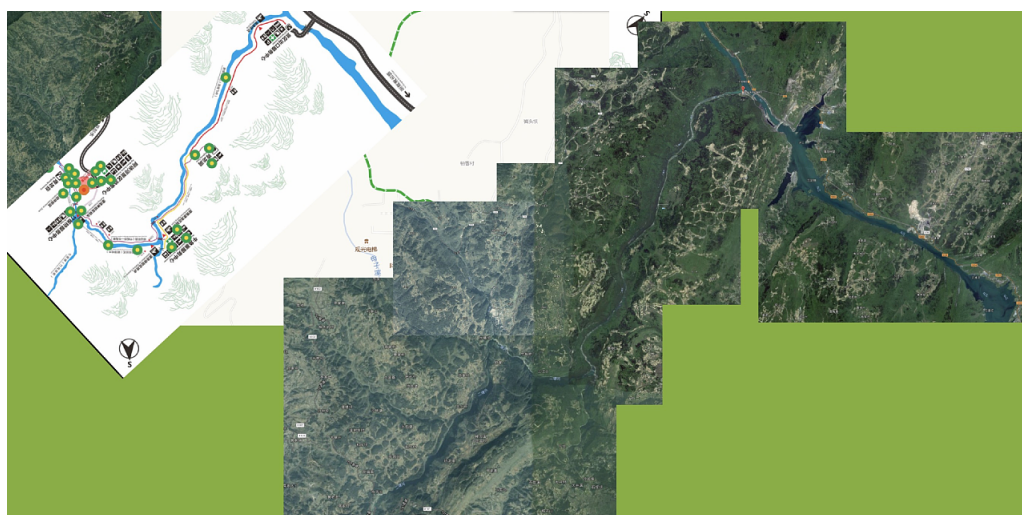


对于地球，我们可以跳出地球，在地球之外看我们的城市，我们研究宇宙难道要跳出宇宙，用上帝视角，像在月球看地球一样看我们的宇宙？我们必须承认，在可预见的将来人类并没有这样的能力。那我们该怎样研究宇宙？



我们不要被现代的技术蒙住眼睛。其实古人没有宇宙飞船，也没有百度地图，他们照样可以研究地球。他们研究地球的办法就是：画地图，画一张张的地图，然后再把地图拼接起来，忘记外在的空间，就可以拼成一张

大地图，甚至拼成一个球。在地球的尺度上，人只相当于球面上的一个小爬虫，但通过一张张地图的拼接，我们依然能够得到足够多的信息。

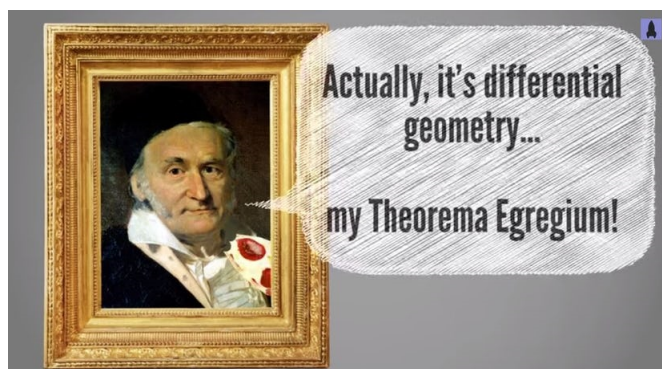


如果大家不喜欢被看成爬虫，我们可以想象自己在探索宇宙，通过一点点的探索，画出宇宙的一张张的三维地图，从而希望得到宇宙的信息。

接下来的问题是，我们能不能通过这些地图和拼接方式得到研究对象的整体性质？或者说拓扑性质？对于大地来说，如果我们仔细遍历脚下的每一寸土地和海洋，我们能不能得到地球是个球，而不是环面？要注意到古希腊人注意到地球是个球是通过太阳来做判断的，我们是否可以不依赖地球外面的任何东西来判断地球是个球呢？

这是一个很经典的问题，难以置信的是，对于曲面来说这居然是对的。我们走遍地球就可以判断出它是一个球而不需要借助外在空间的任何性质。这个神奇的结论来自于高斯的两个里程碑的结果：Gauss 绝妙定理和 Gauss-Bonnet 公式。

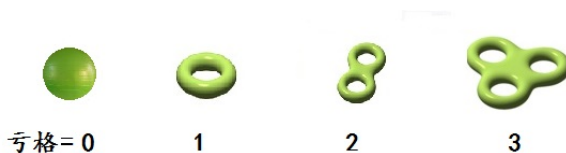
Gauss 绝妙定理我们已经讲过。它指的是，我们可以用一个不依赖于曲面在大空间相对位置和坐标选取的量，Gauss 曲率，来反映曲面的弯曲程度。这就说明了，我们只要用 Gauss 提供的办法，在曲面上研究每个局部的性质，就可以不借助曲面所在外在空间的任何性质，得到曲面的局部弯曲程度。这个定理开启了几何学新时代的大门。“绝妙 (egregium) 定理”这个名字是高斯自己起的，确实非常绝妙。通过高斯绝妙定理我们可以通过高斯曲率来研究曲面上每一点的不依赖于外在空间的弯曲程度。



第二个公式 Gauss-Bonnet 公式说的是，上述得到的高斯曲率就可以决定曲面整体的拓扑，比如可以决定我们所研究的曲面 M 是球面还是环面，无边情形的公式具体如下：

$$\frac{1}{2\pi} \int_M K dS = \chi(M) = 2(1 - g),$$

其中 K 为 Gauss 曲率， $\chi(M)$ 是曲面的欧拉示性数， g 是曲面的亏格，即曲面“洞”的个数。



我们走过整个地球，自然知道它没有边界，既然能走遍说明地球是紧的。这样我们只要测出了每一点的高斯曲率，再把它们积分起来就得到了曲面上洞的个数等于 0，即地球确实是个球。这是几何的力量。我们在这门课程的末尾会给出这个公式的证明。



Gauss 的这两个结果，在哲学上奠定了现代几何学的基础，即我们可以通过研究几何对象的局部信息，来研究几何对象的整体拓扑信息，而且这些局部信息和该几何对象处于什么样的大空间没有一点关系。这样的几何学就叫做“内蕴几何学”，内蕴是指几何体的性质和几何体处在哪个大空间中没有关系，它的所有性质都是由它本身来决定的。我们要努力找到这些与外在空间无关的性质。在这种哲学的指导下，我们研究宇宙也就不一定需要假定宇宙处在哪个更大的空间中。我们在宇宙内部一步步的探索，也有可能得到宇宙整体的信息。

1.1 微分流形

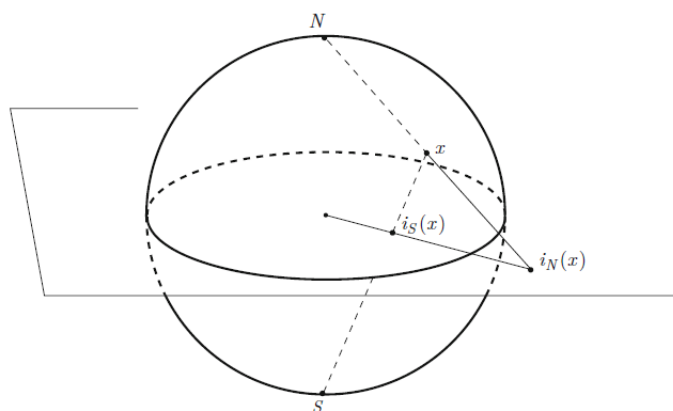
1.1.1 什么是流形？

《易经》：大哉乾元，万物资始，乃统天。云行雨施，品物流形。

《正气歌》：天地有正气，杂然赋流形。

在前言中我们大致描述了流形的想法。流形的英文是 manifold, 望文生义我们可以将其拆解为 mani-fold, mani 可以理解为 map, 这样 manifold 大意就是将地图叠加成“册”。从词源学上讲，这样的拆解是不对的，但意外地可以为我们理解“流形”提供一定的帮助。

聊完故事之后，我们来看一看数学。地图册研究的是我们脚下的地球，我们想要画地图，就从二维球面开始。我们回忆二维单位球面的球极投影如下：



此时，在球面的每一点，我们都可以把这点附近的球面通过某个球极投影映到平面的一部分。这就是我们画地图的过程。而且从球极投影的定义可以看出映射是 1-1 的，连续的，而且映射的逆也是连续的。这样我们的地图就没有丢失必要的信息。唯一不太满意的是我们不能只用一张平面上的地图来描述二维球面，因为球面与平面的子集是不同胚的（为什么？你们现在有能力证明它吗？）这里我们要小心“连续”这一表述。在我们之前的定义中，我们定义的球极投影是从三维欧氏空间的子集到二维平面的映射。这里我们要考虑从球面的一部分到平面的映射，我们提到“连续”就意味着已经把球面看成了一个拓扑空间，其上的拓扑是由三维欧氏空间诱导的子拓扑。所以前面的“映射是 1-1 的，连续的，而且映射的逆也是连续的”意味着球极投影是一个同胚。

现在我们来看一下什么是流形。粗略的说，流形就是可以用上述办法画地图的空间。首先由于同胚概念的存在（画地图不丢失连续性）我们需要流形是一个拓扑空间，且每一点局部可以同胚于欧式空间。但仅仅是拓扑空间是不够的，为了后面分析的需要，我们还需要加上两个稍强的拓扑条件：Hausdorff¹ 和第二可数²。这是我们在点集拓扑中学过的两个拓扑条件。Hausdorff 条件保证了我们可以分离点，而第二可数的条件会在后面用于定义流形上的积分。

定义 1.1.1.³ 设 M 是一个 Hausdorff 且第二可数的拓扑空间。如果 M 上

¹Hausdorff: $\forall x, y \in M$, 存在开邻域 U 和 V , 满足 $x \in U, y \in V$, 且 $U \cap V = \emptyset$.

²第二可数: 存在可数的拓扑基.

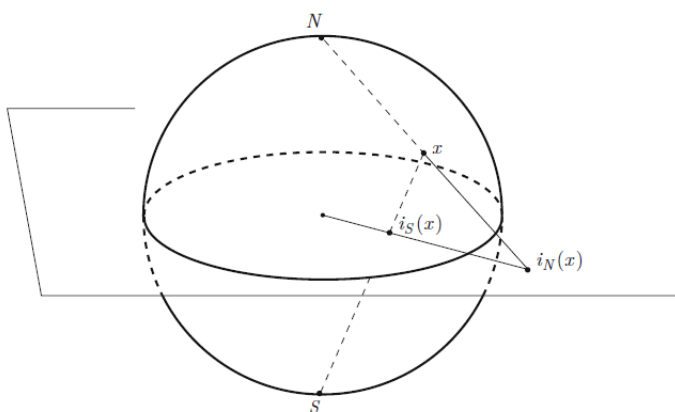
³曾经有一位大数学家教过流形这门课，在很多节课之后，有学生问：“教授，你已经讲

的每个点 $x \in M$ 都存在一个开邻域同胚于 $\mathbb{R}^n$ 的一个开子集, 我们称 M 是一个 n 维拓扑流形.

例 1.1.2. n 维球面

$$S^n = \{x = (x^0, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^{n+1}; |x|^2 = 1\} \quad (1.1)$$

是一个拓扑流形.



证明. 我们继续看球极投影。首先, 由点集拓扑的知识可以知道, 欧氏空间的带有诱导拓扑的拓扑子空间是 Hausdorff 且第二可数的。设 $N = (1, 0, \dots, 0)$ 为球面的北极, $S = (-1, 0, \dots, 0)$ 为球面的南极。设

$$U_1 = S^n \setminus \{N\}, \quad U_2 = S^n \setminus \{S\}. \quad (1.2)$$

球极投影如图所示, 有

$$i_N(x) = \frac{1}{1 - x^0}(x^1, \dots, x^n), \quad i_S(x) = \frac{1}{1 + x^0}(x^1, \dots, x^n). \quad (1.3)$$

显然映射 $i_N : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$, $i_S : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ 既单又满, 而且连续。因为

$$\begin{aligned} i_N^{-1}(y^1, \dots, y^n) &= \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^n (y^i)^2} \left(\sum_{i=1}^n (y^i)^2 - 1, 2y^1, \dots, 2y^n \right), \\ i_S^{-1}(y^1, \dots, y^n) &= \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^n (y^i)^2} \left(1 - \sum_{i=1}^n (y^i)^2, 2y^1, \dots, 2y^n \right). \end{aligned} \quad (1.4)$$

了很多流形的性质, 但从来没有给出过流形的定义。”教授回答: “对于流形, 重要的是理解它, 而不是定义它。”

所以 i_N^{-1}, i_S^{-1} 连续。故 i_N, i_S 是同胚。

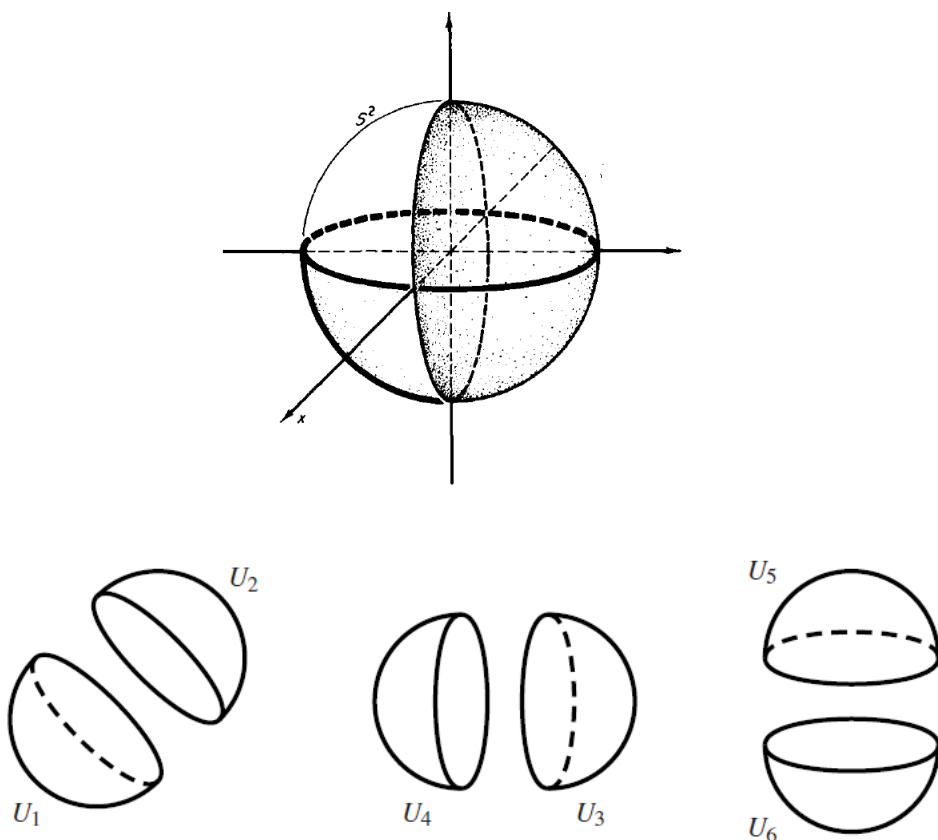
所以 S^n 是一个拓扑流形。

我们还可以用另外的同胚映射来证明这件事情。我们先看

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

考虑上、下、左、右、前、后 6 个半球

$$\begin{aligned} U_1 &= \{(x, y, z) \in S^2 : x > 0\}, & \phi_1(x, y, z) &= (y, z); \\ U_2 &= \{(x, y, z) \in S^2 : x < 0\}, & \phi_2(x, y, z) &= (y, z); \\ U_3 &= \{(x, y, z) \in S^2 : y > 0\}, & \phi_3(x, y, z) &= (x, z); \\ U_4 &= \{(x, y, z) \in S^2 : y < 0\}, & \phi_4(x, y, z) &= (x, z); \\ U_5 &= \{(x, y, z) \in S^2 : z > 0\}, & \phi_5(x, y, z) &= (x, y); \\ U_6 &= \{(x, y, z) \in S^2 : z < 0\}, & \phi_6(x, y, z) &= (x, y). \end{aligned} \tag{1.5}$$



则 S^2 上任一点至少被一个半球覆盖。

对于 S^n , $0 \leq i \leq n$, 设

$$\begin{aligned} U_i^+ &= \{(x^0, \dots, x^n) \in S^n : x^i > 0\}, \\ U_i^- &= \{(x^0, \dots, x^n) \in S^n : x^i < 0\}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

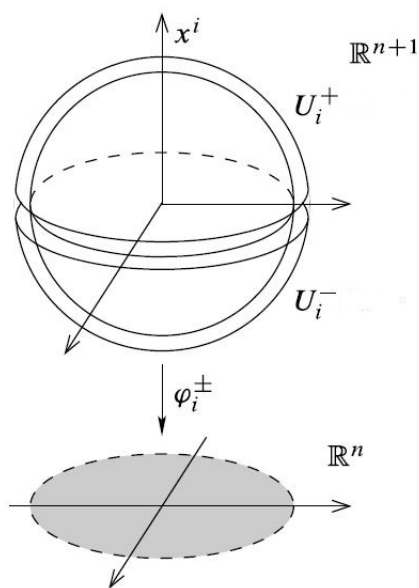
定义 $\varphi_i^\pm : U_i^\pm \rightarrow B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ 为

$$\varphi_i^\pm(x^0, \dots, x^n) = (x^0, \dots, \hat{x}^i, \dots, x^n). \quad (1.7)$$

其中 $\hat{x}^i$ 指去掉这一分量。因

$$(\varphi_i^\pm)^{-1}(y^1, \dots, y^n) = (y^1, \dots, y^i, \pm \sqrt{1 - \sum_{j=1}^n (y^j)^2}, y^{i+1}, \dots, y^n) \quad (1.8)$$

连续, $\varphi_i^\pm$ 均为同胚映射, 且 S^n 上任一点至少被某一个 $U_i^\pm$ 覆盖. $\square$



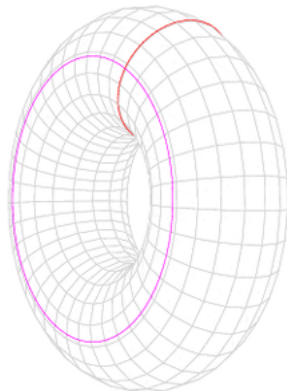
例 1.1.3. 若 M, N 都是拓扑流形, 则笛卡尔积 $M \times N$ 是拓扑流形。

证明. 首先, $M \times N$ Hausdorff 且第二可数。对任意 $(x, y) \in M \times N$, 因 M, N 为拓扑流形, 存在 x 在 M 中的邻域 U 与同胚 $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ 及 y 在 N 中的邻域 V 与同胚 $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$. 所以 $U \times V$ 是 (x, y) 在 $M \times N$ 中的邻域且有同胚 $\phi \times \psi : U \times V \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$. 故 $M \times N$ 是一个拓扑流形. $\square$

递推可得, 若 $M_1, \dots, M_k$ 都是拓扑流形, 则 $M_1 \times \dots \times M_k$ 是拓扑流形.

由上例可得,

例 1.1.4. 环面 $T^2 = S^1 \times S^1$ 是一个拓扑流形.



我们定义 n 维环面为

$$T^n := \overbrace{S^1 \times \dots \times S^1}^{n \uparrow}. \quad (1.9)$$

则 T^n 也是拓扑流形.

1.1.2 如何对流形上的函数求导?

我们并不满足于在拓扑这个层次上对流形进行操作, 希望能够将人类最伟大的认知成就之一: 微积分引入进来。我们由这两年大学的学习经历可以体会到微积分的力量。接下来我们将用微积分来研究流形。

在欧氏空间中, 微积分是作用在空间上的函数上的。所以用微积分研究流形, 我们首先要考察流形上的函数。由于拓扑流形 M 是一个拓扑空间, 我们自然可以在 M 上定义连续函数

$$f : M \rightarrow \mathbb{R}. \quad (1.10)$$

问题: 如何对 f 求导和积分呢?

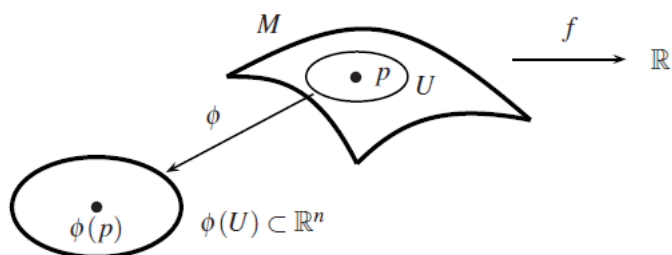
在导论中我们提到过, 人们通过探索不同的地区可以绘制一张张地图, 进而有了“坐标卡 (chart)”的概念.

定义 1.1.5.⁴ 对于拓扑流形 M , 由定义可知存在一族开覆盖 $\{U_\alpha\}$, 使得对每个 $\{U_\alpha\}$ 都存在一个到欧氏空间的开子集上的同胚映射 $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \phi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$. 我们称 (U_α, ϕ_α) 为 M 的一个坐标卡 (chart).

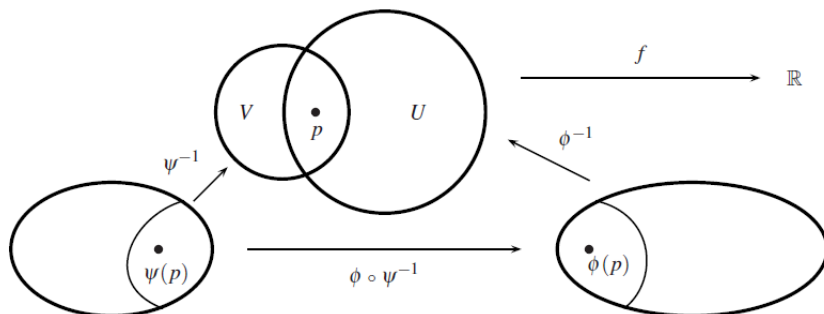
一个自然的想法是, 既然拓扑流形是局部同胚到欧氏空间上的, 而欧氏空间上可导性是个局部的性质, 我们是不是就可以通过这个同胚来定义拓扑流形上连续函数的可微性呢? 用数学语言来描述, 就是给定 $p \in M$, 存在包含 p 的坐标卡 (U, ϕ) , 若

$$f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad (1.11)$$

是一阶可微函数, 我们是否可以取 $f \circ \phi^{-1}$ 在 $\phi(p)$ 点的导数作为 f 在 p 点的导数呢?



这样做会有两个问题, 一个是若 $(U, \phi), (V, \psi)$ 是包含 p 的两个坐标卡, 即使 $f \circ \phi^{-1}$ 在 $\phi(p)$ 点可微, $f \circ \psi^{-1}$ 在 $\psi(p)$ 点也不一定可微. 另一个问题是, 即使 $f \circ \phi^{-1}$ 和 $f \circ \psi^{-1}$ 都可微, 它们求出的偏导数是否相等?



⁴我会在自习室里放一本地图册, 大家可以翻翻, 辅助理解。

对于第一个问题, 由于

$$f \circ \psi^{-1} = (f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \psi^{-1}), \quad (1.12)$$

如果 $f \circ \phi^{-1}$ 可微, 我们需要额外假设

$$\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \phi(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n \quad (1.13)$$

可微, 才能保证 $f \circ \psi^{-1}$ 可微.

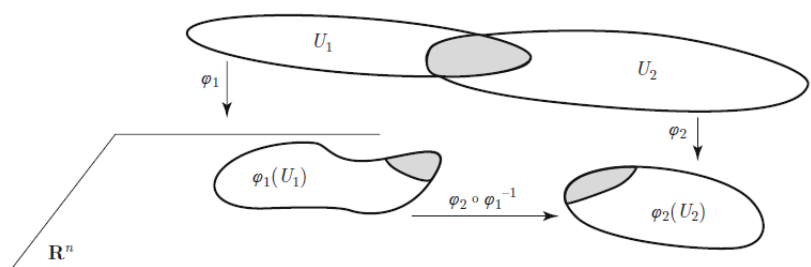
因此对拓扑流形 M 上的点 p , 只有对所有包含 p 点的坐标卡 $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in J}$, $\forall \alpha, \beta \in J$, 都有 $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ 在 $\phi_\beta(p)$ 点可微, 拓扑流形上的函数 f 在 p 点是否可微这个判断才有意义. 由此我们可以看出, 为了拓扑流形上的函数可以求导, 拓扑流形需要附加结构, 只有前面的定义是不够的!

定义 1.1.6. 对拓扑流形 M 上的一个坐标卡的集合 $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$, 如果 $\mathcal{A}$ 满足

1. $\bigcup_{\alpha} U_\alpha = M$, 即 $\{U_\alpha\}$ 是 M 的开覆盖;
2. 对 $\forall \alpha, \beta$, 若 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, 则

$$\phi_{\alpha\beta} := \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \quad (1.14)$$

是 C^k 的⁵;



3. $\mathcal{A}$ 是极大的, 即对 M 的任一坐标卡 (U, φ) , 若对所有使得 $U_\alpha \cap U \neq \emptyset$ 的 α , $\varphi \circ \phi_\alpha^{-1}$ 都是 C^k 的, 则一定有 $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$,

⁵因 ϕ_α 是可逆的双射, 此时 $\phi_{\alpha\beta}$ 是 C^k 微分同胚。

则称 $\mathcal{A}$ 是 M 的一个 C^k -微分结构. 带有 C^k -微分结构的拓扑流形 M 称为 C^k -微分流形. 对 $k = +\infty$, C^∞ -微分流形又被称为光滑流形, 此时的 $\mathcal{A}$ 称为光滑结构.

在 C^k -微分流形 M 上, 我们就可以谈论 M 上的函数是否是 k 阶可微的, 至此我们对与刚才提出的两个问题中的第一个有了较好的解答.

本次课程中, 如果不特意强调, 讲义中提到的流形都假定为光滑流形.⁶

我们来看几个微分流形的例子。

例 1.1.7. n 维球面 S^n 是一个微分流形。

证明. 我们已知 S^n 是一个拓扑流形, 需要证明 S^n 上存在一个微分结构. 考虑球极投影 $i_N : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$, $i_S : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ (1.3), 已知 $U_1 \cap U_2 = S^n$. 由 (1.4),

$$\begin{aligned} i_S \circ (i_N)^{-1}(y^1, \dots, y^n) &= \frac{1}{\sum_{i=1}^n (y^i)^2}(y^1, \dots, y^n), \\ i_N \circ (i_S)^{-1}(y^1, \dots, y^n) &= \frac{1}{\sum_{i=1}^n (y^i)^2}(y^1, \dots, y^n). \end{aligned} \quad (1.15)$$

在 $y \neq 0$ 时, $i_S \circ (i_N)^{-1}$ 与 $i_N \circ (i_S)^{-1}$ 都是 C^∞ 的. 所以 $\{(U_1, i_N), (U_2, i_S)\}$ 满足定义 1.1.6 1, 2. 在 $\{(U_1, i_N), (U_2, i_S)\}$ 基础上我们添加坐标卡满足定义 1.1.6 3 中的极大性, 即可得到 S^n 上的一个微分结构。□

有上述证明可以看出, 只需要找到一个坐标卡覆盖, 使之满足 (1.14) 式, 我们就可以找到一个微分结构. 在之后的证明中, 我们可以省去构造极大坐标覆盖的步骤。

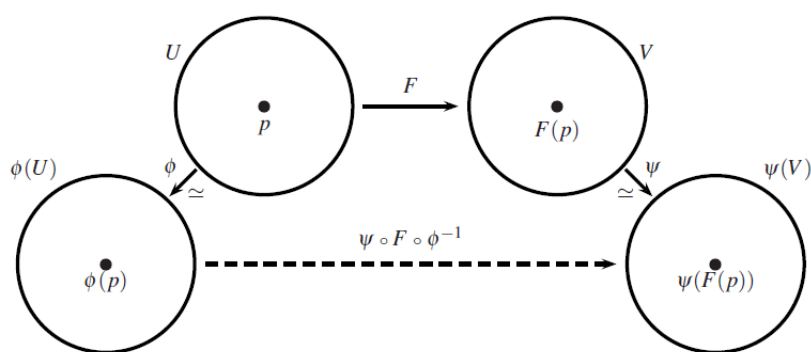
前面依据流形上的光滑结构我们可以定义其上的光滑函数. 类似的, 我们也可以定义两个光滑流形之间的光滑映射.

⁶拓扑流形上不一定存在光滑结构, 如果存在也不一定唯一, 但关于这方面的讨论超出了本讲义的范围。

定义 1.1.8. 设 M, N 是两个光滑流形, 光滑结构⁷分别为 $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}, \{(V_\beta, \varphi_\beta)\}$, 设 $F : M \rightarrow N$ 为连续映射。对 $m \in M$, 如果 $m \in U_\alpha$, 对任意 V_β 包含 $F(m)$,

$$\varphi_\beta \circ F \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \varphi_\beta(V_\beta) \subset \mathbb{R}^n \quad (1.16)$$

都在 m 点光滑. 我们称 F 在 m 点光滑, 如果对 $\forall m \in M$, F 在 m 点光滑, 我们称 F 为光滑映射.



定义 1.1.9. 对光滑映射 $F : M \rightarrow N$, 如果 F 是同胚, 且 F^{-1} 也是光滑的, 我们称 F 是一个 (光滑) 微分同胚⁸.

习题

1. 证明 $\mathbb{R}^n$, 三维空间中的正则参数曲面都是微分流形.
2. 通过 S^n 的另一个覆盖证明 S^n 是一个微分流形.
3. 若 M 是一个微分流形, $U \subset M$ 是一个开子集, 证明 U 是一个微分流形. 此时 U 称为 M 的一个开子流形.
4. 设 $M(n, \mathbb{R})$ 为所有 n 阶实方阵组成的集合. 定义一般线性群为

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) = \{X \in M(n, \mathbb{R}) : \det(X) \neq 0\}. \quad (1.17)$$

求证: $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ 是一个微分流形.

⁷在后面, 我们经常会省略光滑结构的定义, 假定流形上存在一个固定的光滑结构.

⁸我们可以自然定义流形间的 C^k 映射和 C^k 微分同胚. 在本讲义中, 我们提到的微分同胚都是光滑微分同胚.

5. 固定 $g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, 对任意 $h \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $h \mapsto gh$ 定义了一个映射

$$L_g : \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}), \quad L_g(h) = gh. \quad (1.18)$$

求证: L_g 是一个光滑映射.

6. 定义映射

$$\iota : \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}), \quad \iota(h) = h^{-1}. \quad (1.19)$$

求证: ι 是一个光滑映射.